

Les Intégrales

1)Definition:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On appelle **primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que :**

$$F'(x) = f(x)$$

L'ensemble de toutes les primitives de f est noté par l'intégrale indéfinie :

$$\int f(x) = F(x) + C$$

(Où C est une constante réelle car la dérivée d'une constante est nulle).

EX:

• **Siot** $f:\mathbb{R} \implies \mathbb{R}$

• $f(x)=x$

• $\implies F'(x)=f(x)$

$F:\mathbb{R} \implies \mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{x^2}{2} \implies F'(x) = \frac{2x}{2}=x$$

Propriétés fondamentales:

1. Linéarité : Pour tous réels α, β et fonctions f, g :

$$\bullet \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

1. Relation de Chasles : Pour tout $c \in [a, b]$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

1. Inversion des bornes :

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

1. Positivité et Croissance :

$$\bullet \text{ Si } f(x) \geq 0 \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\bullet \text{ Si } f(x) \leq g(x) \text{ sur } [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Méthodes de calcul d'intégrales:

- **Intégration par parties (IPP):**
- **la dérivée d'un produit, elle est utile quand l'intégrande est le produit de deux fonctions de natures différentes:**
- $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b + \int_a^b v(x)u'(x)dx$

Valeur moyenne:

- **La valeur moyenne M d'une fonction f sur $[a, b]$ est donnée par :**

$$\bullet \quad M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Remarque:

- **Si f est impaire** : $\int_a^b f(x)dx = 0$
- **Si f est paire** : $\int_a^b f(x)dx = 2 \int_a^b f(x)dx$

Fonctions Puissances et Rationnelles:

Ces formules sont valables sur tout intervalle où la fonction est définie.

Fonction f(x)	Primitive F(x)	Condition
0	C	
a (constante)	ax + C	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$x \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) +c$	$x > 0$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}+C$	$n \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$x > 0$

7) Fonctions Exponentielles et Logarithmiques:

Fonction f(x)	Primitive F(x)	Condition
e^x	$e^x + C$	
e^{nx}	$\frac{1}{n} e^{nx} + C$	$n \neq 0$
n^x	$\frac{n^x}{\ln(n)} + C$	$n > 0, n \neq 1$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x + C$	$x > 0$

8) Fonctions Trigonométriques:

Fonction f(x)	Primitive F(x)
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

9) Fonctions Circulaires Inverses (Arc-fonctions)

Ces formes apparaissent fréquemment lors de la décomposition en éléments simples de fractions rationnelles :

Fonction f(x)	Primitive F(x)
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{n^2+x^2}$	$\frac{1}{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$

Formes Composées (U-substitution directe)

- **C'est souvent ici que se jouent les points en examen. Si vous reconnaissez la forme de la dérivée, le calcul devient immédiat :**
- **Puissance :** $\int u'(x) u(x)^n dx = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
- **Logarithmique :** $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln(x) + c$
- **Exponentielle :** $\int u'(x) e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + c$
- **Racine :** $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = 2\sqrt{u(x)} + c$

11)La Formule

- **Si u et v sont deux fonctions dérivables sur [a, b], la formule est :**
- $\int u(x)v'(x) = \int u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)$

12) Comment choisir $u(x)$ et $v'(x)$? (La règle ALPES)

- Pour réussir une IPP, le secret est de bien choisir quelle fonction on va dériver (u) et laquelle on va intégrer (v'). On utilise souvent l'ordre de priorité **ALPES** pour choisir $u(x)$:
- **A : Arc** (Arcsin, Arccos, Arctan)
- **L : Logarithme** ($\ln$)
- **P : Polynôme** (x^2 , $3x$, 1 , ...)
- **E : Exponentielle** (e^x)
- **S : Sinus / Cosinus**
- La fonction qui arrive en premier dans cette liste sera votre $u(x)$.

Ex

- **Exemple 1 : Produit Polynôme × Exponentielle**
- **Calculatrice** $I = \int x e^{2x} dx$
- **Choix : D'après ALPES, le Polynôme (x) passe avant l'Exponentielle.**
- $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$
- $v'(x) = e^{2x} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$
- **Application :**
- $I = [x \cdot \frac{1}{2} e^{2x}] - \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx$
- $\Rightarrow [x \cdot \frac{1}{2} e^{2x}] - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$
- $I = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$

Ex2:

- **Calculatrice** $K = \int x \sin(x) dx$
- **Choix : Le Polynôme (x) avant le Sinus.**
- $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$
- $v'(x) = \sin(x) \Rightarrow v(x) = -\cos(x)$
- **Application :**
- $K = [-x \cos(x)] - \int 1 \cdot -\cos(x) dx$
- $K = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx$
- **Résultat : $K = -x \cos(x) + \sin(x) + C$**

Astuce d'examen : L'IPP répétée

- **Si vous avez une intégrale comme $\int x^2 e^x dx$, vous devrez faire l'IPP deux fois . La première fera passer le x^2 en $2x$, et la deuxième disparaîtra le x pour ne laisser que l'exponentielle.**

changement de variable:

- **La Méthode (Pas à pas)**
- **Pour calculer $\int f(x) dx$ par changement de variable :**
- **1-choisir le changement : On pose $t = u(x)$.**
- **2-Calculer la nouvelle différentielle : On dérive t par rapport à x pour trouver dt (sur un $dt = u'(x) dx$).**
- **3-Exprimer l'intégrale en fonction de t : On remplace tous les x et le dx par leurs équivalents en t .**
- **4-Changer les bornes (si l'intégrale est définie) : Si on a $\int_a^b$, les nouvelles bornes deviennent $u(a)$ et $u(b)$.**
- **5-calculer et revenir à la variable x : Une fois la primitive trouvée en t , sur remplacer t par sa valeur initiale.**

EX:

- $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx \quad x \in]1, +\infty[$
- On pose $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1 \Rightarrow x = t^2+1$
- $dx = 2t dt$
- $I = \int \frac{1}{(t^2+1)t} 2t dt \Rightarrow \int \frac{2t}{(t^2+1)t} dt \Rightarrow \int \frac{2}{(t^2+1)} dt$
- $I = 2\arctan(t) + C$
- $\Rightarrow I = 2\arctan(\sqrt{x-1}) + C$

14)Intégration des fractions rationnelles P(x)/Q(x)

- **1. Étape préliminaire : La Division Euclidienne**

- **Si le degré du numérateur P(x) est supérieur ou égal au degré du dénominateur Q(x) ($\deg(P) \geq \deg(Q)$), on effectue une division euclidienne pour obtenir :**

- $$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

- **Où S(x) est un polynôme (facile à intégrer) et $\deg(R) < \deg(Q)$.**

- **2. Décomposition en éléments simples**

- **Sur $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en éléments plus simples. Le résultat des racines de Q(x):**

- **-Cas A : Racines réelles simples**

- **Si $Q(x) = (x-a)(x-b)$, alors :**

- $$\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

- **Intégrale : Donne du A ln|x-a| + B ln|x-b|.**

- **-Cas B : Racines réelles multiples**

- **Si $Q(x) = (x-a)^n$, alors :**

- $$\frac{R(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)^1} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

- **Intégrale : Donne un mélange de ln et de puissances négatives $\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$.**

- **-Cas C : Facteurs du deuxième degré irréductibles ($\Delta < 0$)**

- **Si $Q(x) = x^2 + px + q$ sans racines réelles, on cherche une forme en :**

- $$\frac{R(x)}{x^2 + px + q} = \frac{Ax+B}{x^2 + px + q}$$

- **Intégrale : Donne souvent un mélange de ln (pour la partie en u'/u) et de arctan.**

3. Exemple pratique : Racines simples

- **Calculatrice** $I = \int \frac{5x-1}{x^2 + x - 2} dx$
- **Factoriser le dénominateur** : $x^2 + x - 2 = (x-2)(x+1)$
- **Décomposeur**:
 - $\frac{5x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{b}{x+1}$
 - **Pour trouver A**, sur plusieurs par $(x-2)$ et sur pose $x=2 \Rightarrow A = \frac{5x-1}{(2+1)} = 3$
 - **Pour trouver B**, sur plusieurs par $(x+1)$ et sur pose $x=-1 \Rightarrow B = \frac{5x(-1)-1}{(-1-2)} = 2$
- **Intégrer** :
 - $\int \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1} dx = 3\ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C$

Résumé pour l'étudiant :

- **Étape 1 : Degré du haut < Degré du bas ? (Sinon, divisez).**
- **Étape 2 : Factorisez le bas au maximum.**
- **Étape 3 : Écrivez la forme théorique de la décomposition.**
- **Étape 4 : Connaître les coefficients (A, B,).**
- **Étape 5 : Intégrez chaque terme séparément.**